МЕТОДЫ НЕПОЛНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ НЕЯВНОГО ТИПА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В. И. Сабинин

Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева
СО РАН, Новосибирск
sabinin@hydro.nsc.ru

Рассмотрим двумерную разностную задачу эллиптического типа

$$Lh_{ij} \equiv -a_{ij}h_{i-1,j}-b_{ij}h_{i,j-1}-c_{ij}h_{i+1,j}-d_{ij}h_{i,j+1}+e_{ij}h_{ij} = f_{ij}, \quad (1)$$

где $i = 0, 1, ..., I$ – вдоль оси x, $j = 0, 1, ..., J$ – вдоль оси z.

Метод неполной факторизации, предложенный Н.И.Булеевым в 1960 г. для решения подобных систем, является одношаговым итерационным методом и заключается в последовательном решении следующего уравнения (при известном начальном h^o_{ij}, для всех i, j):

$$UV(h^{s+1}_{ij} - h^s_{ij}) = -L^s h^s_{ij} + f^s_{ij}, \quad s = 0, 1, 2, ..., \quad (2)$$

где s – номер итерации. Предполагается, что операторы U и V легко обратимы, причем

$$UV = L + H, \quad (3)$$

где H – это оператор, который задается так, чтобы обеспечить наилучшую сходимость метода. Считается, что оператор легко обратим, если его матрица имеет треугольный вид или обращается методом прогонки. Если U или V обращается методом прогонки, то итерационный метод неполной факторизации называется неявным.

В работе [1] был предложен быстро сходящийся алгоритм неявного метода неполной факторизации для квазилинейного уравнения (1) – с коэффициентами, зависящими от искомого решения, который затем был существенно улучшен в [2] алгоритмом встречного счета. Согласно [2] операторы U, V и H определяются следующим образом:

$$Uu_{ij} \equiv u_{ij} - \alpha_{ij}u_{ik}, \ \ j \neq j_o, \tag{4}$$

$$Uu_{ij} \equiv u_{ij} - \alpha^-_{ij}u_{i,j-1} - \alpha^+_{ij}u_{i,j+1}, \ \ j = j_o,$$

где $\alpha = \alpha^-$, $k = j - 1$ для $j < j_o$, и $\alpha = \alpha^+$, $k = j + 1$ для $j > j_o$;

$$Vv_{ij} \equiv \gamma_{ij}v_{ij} - \beta_{ij}v_{i-1,j} - \delta_{ij}v_{i+1,j} - \xi_{ij}v_{ip}, \tag{5}$$

где $p = j + 1$ для $j < j_o$ и $p = j - 1$ для $j > j_o$;

$$Hv_{ij} \equiv \alpha_{ij}\beta_{i,k}[v_{i-1,k} - v_{i-1,j} + \omega_s(v_{ij} - v_{i,k})]+$$

$$+\alpha_{ij}\delta_{i,k}[v_{i+1,k} - v_{i+1,j} + \omega_s(v_{ij} - v_{i,k})] - (\partial f/\partial h)^s_{ij}, \ \ j \neq j_o. \tag{6}$$

$$Hv_{ij} \equiv \alpha_{ij}\beta_{i,j-1}[v_{i-1,j-1} - v_{i-1,j} + \omega_s(v_{ij} - v_{i,j-1})]+$$

$$+\alpha_{ij}\delta_{i,j-1}[v_{i+1,j-1} - v_{i+1,j} + \omega_s(v_{ij} - v_{i,j-1})]+$$

$$\alpha_{ij}\beta_{i,j+1}[v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j} + \omega_s(v_{ij} - v_{i,j+1})]+$$

$$+\alpha_{ij}\delta_{i,j+1}[v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j} + \omega_s(v_{ij} - v_{i,j+1})] - (\partial f/\partial h)^s_{ij}, \ \ j = j_o.$$

Параметр j_o – это номер j горизонтальной (параллельно оси x) линии разностной сетки, на которой находится граничный или внутренний узел с заданным в нем значением искомой функции h. Как показано в [2], наилучшим значением для j_o является ближайшее к $J/2$.

Коэффициенты операторов U и V связаны с коэффициентами оператора L рекуррентными формулами, которые следуют из условия (3).

Здесь дано определение операторов U и V, ориентированное по j. Исходя из него, поменяв и переставив индексы, нетрудно написать определение, ориентированное по i. Для конкретной задачи ориентацию по i или по j следует избирать, исходя из выполнения следующих условий: 1) преобладания по величине коэффициентов разностной схемы a_{ij} над b_{ij} для выбора ориентации по i или преобладания b_{ij} над a_{ij} для выбора ориентации по j; 2) возможности выбора номера линии j_o (или вертикальной линии i_o – для ориентации по i) ближе к середине интервала изменения; 3) меньшего числа узлов сетки по направлению ориентации. Предпочтительность выбора той или иной ориентации в некоторых случаях может зависеть также и от формы области.

Неявные методы позволяют задавать шаблон оператора H в виде двойного прямоугольника (6), что, как показано в [2], придает итерационному методу неполной факторизации свойство подавлять нулевую компоненту погрешности решения и тем самым делает его эффективным при решении краевых задач, близких к задаче Неймана.

В работе [3] предложен неявный метод неполной факторизации для пространственных задач, обобщающий метод (2)–(6) на три измерения, а также дано его обобщение на четыре и более измерений. В работе [2] исследованы свойства этих методов и предложены циклические наборы итерационных параметров.

С помощью этих итерационных методов были численно решены на персональных компьютерах разнообразные задачи о систематическом дренаже в рамках гидродинамической модели фильтрации с неполным насыщением [1, 3–6], предъявляющие высокие требования к итерационным методам решения, а также задачи подземного солепереноса к систематическому дренажу [7–10]. Для решения уравнения солепереноса в этих задачах были предложены методы неполной факторизации, пригодные для решения разностных уравнений гиперболического типа.

Метод, симметричный к (2)–(6), то есть с переставленными определениями операторов U и V, был предложен в работе [11]. Там же был предложен итерационный метод, объединяющий эти два взаимно-симметричных метода, для решения разностной задачи солепереноса гиперболического типа, которая является аппроксимацией краевой задачи для уравнения конвективной дисперсии:

$$S\varphi_{ij} \equiv -a_{ij}\varphi_{i-1,j} - b_{ij}\varphi_{i,j-1} - c_{i,j}\varphi_{i+1,j} - d_{ij}\varphi_{i,j+1} + e_{ij}\varphi_{ij} -$$

$$-m_{ij}\varphi_{i-1,j-1} - n_{ij}\varphi_{i+1,j+1} + p_{ij}\varphi_{i-1,j+1} + q_{ij}\varphi_{i+1,j-1} = f_{ij}.$$

Этот сдвоенный метод оказался эффективным для задач переноса с произвольным направлением скорости фильтрации и был успешно применен в работе [12] для моделирования тепло-соле-влагопереноса с образованием льда.

В работе [13] решена задача о совместном течении ливневой воды по наклонной поверхности земли и фильтрации ее в грунте. Для решения этой задачи метод (2)–(6) был модифицирован применительно к разностной сетке с приграничными ячейками треугольной формы.

Опыт исследования итерационных методов неполной факторизации неявного типа и применения их для численного моделирования фильтрации грунтовых вод и массопереноса [1–13] показал надежность, экономичность и эффективность этих методов при невысоких затратах труда на программирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабинин В.И. *Численное решение задачи о горизонтальном систематическом дренаже с зоной неполного насыщения* // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1980. – Вып. 46. – С. 122–136.

2. Сабинин В.И. *Об одном алгоритме метода неполной факторизации* // В сб.: Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: ВЦ и ИТПМ СО АН СССР, 1985. – Т. 16. – N 2. – С. 103–117.

3. Сабинин В.И. *Численное решение трехмерной задачи фильтрации с неполным насыщением* // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1981. – Вып. 51. – С. 129–141.

4. Рыбакова С.Т., Сабинин В.И. *Задача неустановившейся насыщенно-ненасыщенной фильтрации к горизонтальным дренам* // Известия АН СССР. МЖГ. – 1981. – N 5. – С. 81–87.

5. Сабинин В.И. *Исследование ошибки гидравлического приближения в задачах о дренаже* // В сб.: Математическое моделирование гидрогеологических процессов. – Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1984. – С. 142–150.

6. Сабинин В.И. *Задача расчета дренажа рисовых чеков* // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1987. – Вып. 81. – С. 103–116.

7. Сабинин В.И. *Исследование рассоляющего действия дренажных промывок* // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1988. – Вып. 86. – С. 96–115.

8. Сабинин В.И. *Режим дренажных промывок и прогноз качества рассоления* // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1989. – Вып. 90. – С. 106–119.

9. Сабинин В.И. *Профильная задача солепереноса к дренам с учетом катионного обмена* // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1990. – Вып. 97. – С. 92–106.

10. Сабинин В.И. *Компьютерный прогноз переноса загрязнений подземными водами* // В сб.: Динамика сплошной среды. –

Новосибирск, 1994. – Вып. 108. – С. 51–62.

11. Сабинин В.И. *Метод приближенной факторизации для решения разностных уравнений конвективной дисперсии* // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1996. – Вып. 111. – С. 117–123.

12. Сабинин В.И. *Решение задачи подземного теплосолевлаиопереноса методом неполной факторизации* // Сиб. журн. вычисл. математики. – СО РАН, Новосибирск. – 1999. – Т. 2. – N 1. – С. 69–80.

13. Сабинин В.И. *Объединенная математическая модель склонового и подземного стока* // Математические модели фильтрации и их приложения: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Инст. гидродинамики им. М.А.Лаврентьева, 1999. – С. 149–158.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОНИЦАЕМЫХ ПРОФИЛЕЙ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Т. Н. Смирнова

Чувашский государственный университет
stn@chuvsu.ru

Дано численно-аналитическое исследование обтекания профиля с непрерывной проницаемостью. Ранее автором [1] рассматривалось дискретное распределение источников и стоков. Проницаемые профили изучались в работе [2].

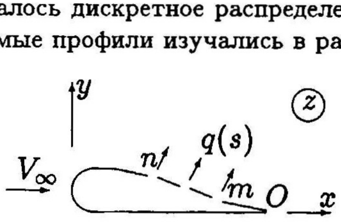

Рис. 1

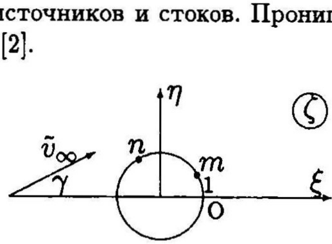

Рис. 2

Постановка задачи. Через часть контура (m, n) (рис. 1) с заданной нормальной скоростью $v_n = q(s)$ происходит протекание жидкости.

Решение осуществляется в три этапа: 1) численное конформное отображение внешности профиля на плоскость w с разрезом